OYAK
TÜBİTAK BİLİM İNSANI DESTEKLEME DAİRE BAŞKANLIĞI

10. OYAK MATEMATİK YARIŞMASI
İL BİRİNCİLİĞİ SINAVI

ADANA - BALIKESİR - BATMAN - BOLU - DÜZCE
HATAY - KAHRAMANMARAŞ - MARDİN - ORDU
RİZE - SAKARYA - SİVAS - TEKİRDAĞ - ZONGULDAK

19 KASIM 2011

SORULAR

---

1. a, b, c birbirlerinden farklı gerçel sayılar olmak üzere, katsayıları gerçel sayılar olan ikinci dereceden bir $p(x)$ polinomunun a, b, c noktalarında aldığı değerler aşağıda verilmiştir.

$$p(a) = bc,$$

$$p(b) = ac,$$

$$p(c) = ab.$$

$p(a+b+c)$ değerini a, b, c cinsinden hesaplayınız.

2. a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere, $\dfrac{a^2 - ab + a - 1}{ab + 1}$ ifadesinin tam sayı olmasını sağlayan tüm (a, b) sıralı ikililerini bulunuz.

3. Dar açılı bir ABC üçgeninde H diklik merkezi ve O çevrel çember merkezi olsun. HB nin ve HC nin orta noktaları sırasıyla M ve N olsun. H, M, N, O noktalarının çembersel olması durumunda bu noktalardan geçen çemberin üçgenin çevrel çemberine teğet olduğunu gösteriniz.

4. Ateş ile Güneş ellerinde bulunan dörder tane taşı 4×4'lük bir satranç tahtasının birim karelerine yerleştiriyorlar. Ateş'in yerleştirdiği taşların herhangi ikisi aynı satırda bulunmamaktadır. Güneş'in yerleştirdiği taşların da herhangi ikisi aynı sütunda bulunmamaktadır. Aynı birim kareye hem Ateş'in hem de Güneş'in taş koymaları mümkündür.

a. İçinde iki tane taş bulunan herhangi bir birim kare olmaması olasılığını hesaplayınız.

b. Herbirinde ikişer taş bulunan tam olarak iki birim kare olması olasılığını hesaplayınız.

Süre 3 saattir.
Her soru 10 puan değerindedir.

ÇÖZÜMLER

1. $p(x) = Ax^2 + Bx + C$ olsun. Verilen değerleri yazarak,

$$\begin{aligned} Aa^2 + Ba + C &= bc \quad (I) \\ Ab^2 + Bb + C &= ac \quad (II) \\ Ac^2 + Bc + C &= ab \quad (III) \end{aligned}$$

elde ederiz. Birinci denklemden ikinciyi ve üçüncüyü çıkararak

$$\begin{aligned} A(a^2 - b^2) + B(a - b) &= c(b - a) \\ A(a^2 - c^2) + B(a - c) &= b(c - a) \end{aligned}$$

elde edilir. $a - b$ ve $a - c$ sıfırdan farklı oldukları için sadeleştirmeler yapılarak

$$\begin{aligned} A(a + b) + B &= -c \\ A(a + c) + B &= -b \end{aligned}$$

bulunur. Bu iki denklemin farkından

$$A(b - c) = b - c$$

ve $b - c$ nin sıfır olmadığı kullanılarak $A = 1$ bulunur. Bu durumda $B = -(a + b + c)$ ve $C = ab + bc + ac$ dir. Sonuç olarak

$$p(x) = x^2 - (a + b + c)x + (ab + bc + ca)$$

olduğu görülür. Buna göre $p(a + b + c) = ab + bc + ca$ dır.

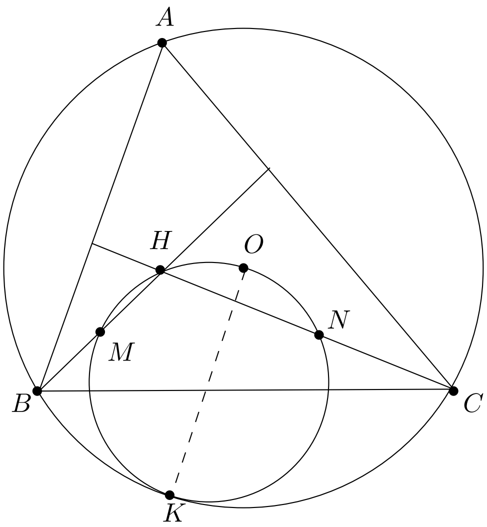
2. Birinci Çözüm. $a^2 - ab + a - 1 = a^2 + a - (ab + 1)$ olduğu için $ab + 1$, $a^2 + a$ yı da böler. Dolayısıyla $b(a^2 + a) - a(ab + 1) = ab - a$ yı da böler. Fakat $ab + 1$, $ab - a$ den daha büyük olduğu için $ab - a = 0$ olmalıdır. $a > 0$ olduğu için $b = 1$ olmalıdır. $b = 1$ olduğunda ise verilen ifade $\dfrac{a^2 - 1}{a + 1} = a - 1$ haline dönüşür. Dolayısıyla $b = 1$ olmalıdır. a herhangi bir pozitif tam sayı olabilir.

İkinci Çözüm. $a^2 - ab + a - 1 = a^2 + a - (ab + 1)$ olduğundan verilen ifadenin tam sayı olması için $\dfrac{a^2 + a}{ab + 1} = \dfrac{a(a + 1)}{ab + 1} \in \mathbb{Z}^+$ olmalıdır. a ile $ab + 1$ aralarında asal olduklarından, $(ab + 1) \mid (a + 1)$ olur. Dolayısıyla $b = 1$ elde edilir. Bu durumda ifade $\dfrac{a^2 - 1}{a + 1} = a - 1$ olacağından $a \in \mathbb{Z}^+$ olur.

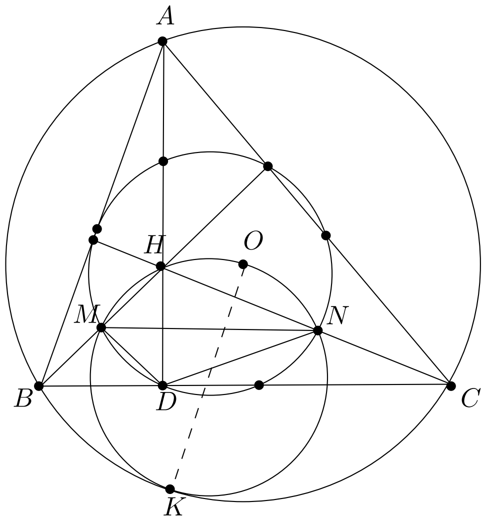
3. Birinci Çözüm. M ve N orta noktalar olduğundan HMN ve HBC üçgenleri $1 : 2$ oranıyla benzerdir. Dolayısıyla çevrel çemberlerinin yarıçaplarının oranı da $1 : 2$ dir. Ayrıca HBC üçgeninin ve ABC üçgeninin çevrel çemberlerinin yarıçapları aynıdır (R olsun). Bunun nedeni bu çemberlerde ortak olan BC kirişini $\widehat{A}$ ve $\widehat{BHC} = \widehat{B} + \widehat{C}$ açıları ile görmeleridir. Burada sinüs teoremini ve bu iki açının sinüslerinin eşit olduğunu kullanıyoruz:

$$\frac{|BC|}{\sin(\widehat{BHC})} = \frac{|BC|}{\widehat{A}} = 2R.$$

Dolayısıyla H, M, N, O noktalarından geçen çemberin yarıçapı $R/2$ dir. Bu çemberde O noktasından geçen OK çapını alalım. $|OK| = R$ olduğu için K noktası çevrel çember üzerindedir. Bu noktada da iki çember birbirine teğettir.



1. çözüm



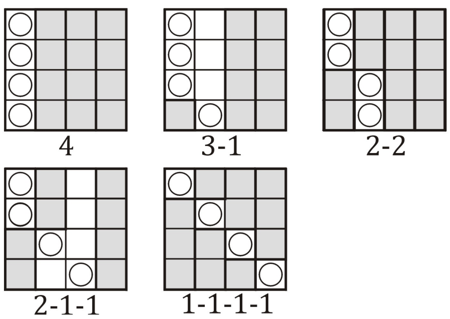
2. çözüm

İkinci Çözüm. A köşesinden BC kenarına indirilen yüksekliğin ayağı D olsun. M ve N orta noktalar olduğundan MN, HD nin orta dikmesidir. Dolayısıyla HMN ve DMN eş üçgenlerdir ve eş çevrel çemberlere sahiplerdir. DMN den geçen çember meşhur dokuz nokta çemberidir. Bu çemberin bir özelliği yarıçapının ABC üçgeninin çevrel çember yarıçapının yarısına yani $R/2$ ye eşit olmasıdır. (Bu bilgiler yarışmaya katılan öğrenciler için hazırlanan Çözümlü Matematik Problemleri kitabında bulunmaktadır.) Buradan H, M, N, O noktalarından geçen çemberin yarıçapının da $R/2$ olduğunu elde ederiz. Bu çemberde O noktasından geçen OK çapını alalım. $|OK| = R$ olduğu için K noktası çevrel çember üzerindedir. Bu noktada da iki çember birbirine teğettir.

* Bu çözüm Ünye MRG Anadolu Öğretmen Lisesi Matematik Öğretmeni Sayın Enver Yılmaz tarafından önerilmiştir.

4. Birinci Çözüm.

a. Ateş'in taşlarının sütunlara sayıca dağılışı beş farklı şekilde gerçekleşebilir:



- Taşların tümü aynı sütunda (4),
- Üç taş bir sütunda diğeri başka bir sütunda (3-1),

- İki taş bir sütunda diğer iki taş başka bir sütunda (2-2),
- İki taş bir sütunda diğer iki taş farklı sütunlarda (2-1-1),
- Her taş farklı bir sütunda(1-1-1-1).

(4) dağılımı gerçekleştiği durumda, Ateş'in taşlarının yer aldığı sütunda Güneş'in bir taşı bulunacağından çakışma kaçınılmazdır yani çakışmama olasılığı 0 dır.

(3-1) dağılımının gerçekleşme olasılığını şöyle hesaplayabiliriz: Üç taşın bulunduğu sütun ile bu sütundaki üç birim karenin seçilmesi $4\binom{4}{3}=16$ farklı şekilde; diğer taşın bulunduğu sütunun seçilmesi 3 farklı şekilde gerçekleştirilebilir. Tüm durumların sayısı 4^4 olduğundan, aradığımız olasılık $\frac{16\cdot 3}{4^4}=\frac{3}{16}$ olur. Bu durumda çakışma olmama olasılığı $\frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{4}{4}\frac{4}{4}=\frac{3}{16}$ dır. Sonuç olarak, bu durumun çakışma olmadan gerçekleşmesinin olasılığı $\frac{3}{16}\frac{3}{16}=\frac{9}{256}$ olur.

(2-2) dağılımının gerçekleşme olasılığı $\frac{1}{4^4}\binom{4}{2}\binom{4}{2}=\frac{9}{64}$ dür. Bu dağılımda çakışmama olasılığı $\frac{2}{4}\frac{2}{4}\frac{4}{4}\frac{4}{4}=\frac{1}{4}$ olduğundan, bu dağılımın çakışma olmadan gerçekleşmesi olasılığı da $\frac{9}{64}\frac{1}{4}=\frac{9}{256}$ olur.

(2-1-1) dağılımının gerçekleşme olasılığını hesaplayalım: iki taşın bulunduğu sütunun seçilmesi için 4 seçenek ve bu sütundaki iki karenin seçimi için $\binom{4}{2}=6$ seçenek vardır. Bir tane taş bulunduran sütunları ise $3\cdot 2=6$ farklı yoldan seçebiliriz. Böylece, dağılımın gerçekleşme olasılığı $\frac{4\cdot 6\cdot 6}{4^4}=\frac{9}{16}$ dür. Bu dağılım gerçekleştiğinde çakışma olmama olasılığı $\frac{2}{4}\frac{3}{4}\frac{3}{4}\frac{4}{4}=\frac{9}{32}$ olduğundan, (2-1-1) dağılımının çakışma olmadan gerçekleşmesi olasılığı $\frac{9}{16}\frac{9}{32}=\frac{81}{512}$ dir.

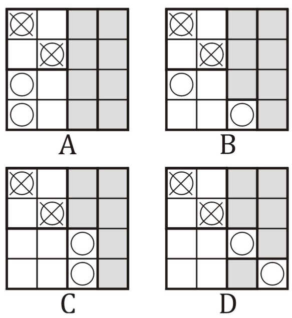
(1-1-1-1) dağılımının gerçekleşmesi olasılığı $\frac{4}{4}\frac{3}{4}\frac{2}{4}\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$ ve bu durum gerçekleştiğinde çakışma olmaması olasılığı $\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256}$ dır. Sonuç olarak (1-1-1-1) dağılımının çakışmasız olarak gerçekleşmesi olasılığı $\frac{3}{32}\frac{81}{256}=\frac{243}{8192}$ olur.

Tüm durumları göz önüne aldığımızda aradığımız olasılık değerini:

$$\frac{9}{256}+\frac{9}{256}+\frac{81}{512}+\frac{243}{8192}=\frac{2115}{8192}=0,25818\ldots.$$

olarak buluruz.

b. Tam olarak iki çakışma olan durumların sayısını bulmak için birinci satırın birinci sütunu ile ikinci satırın ikinci sütununda çakışma olduğunu kabul edelim. Aşağıdaki şekil, incelenen durumları temsil etmektedir. Ateş'in taşları O ile; Güneş'in taşları X ile işaretlidir. Çakışma olan kareler hem O hem de X içeren kareler; gölgeli boş kareler ise Güneş'in taşlarını koyabileceği karelerdir.



Diğer taşların çakışma olmadan koyulabileceği durumları 4 sınıfa ayırabiliriz:

Durum A: Ateş'in diğer taşları ilk iki sütunda yer alır. Bu durumda Ateş taşlarını 4 farklı biçimde; Güneş ise $4\cdot 4=16$ farklı biçimde yerleştirebilir.

Durum B: Ateş'in taşlarından birisi ilk iki sütunun birisinde, diğeri son iki sütundan birisindedir. Bu durumda Ateş taşlarını 8 farklı biçimde; Güneş ise $3\cdot 4=12$ farklı biçimde yerleştirebilir.

Durum C: Ateş'in taşlarının ikisi de üçüncü (veya dördüncü) sütundadır. Bu durumda Ateş taşlarını 2 farklı biçimde; Güneş ise $2 \cdot 4 = 8$ farklı biçimde yerleştirebilir.

Durum D: Ateş'in taşlarının birisi üçüncü, diğeri dördüncü sütundadır. Bu durumda Ateş taşlarını 2 farklı biçimde; Güneş ise $3 \cdot 3 = 9$ farklı biçimde yerleştirebilir.

Tüm durumlarda elde edilen sayıların toplamı $4 \cdot 16 + 8 \cdot 12 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 9 = 194$ olarak elde edilir.

Çakışma olan iki karenin belirlenmesi için $\frac{16 \cdot 9}{2} = 72$ farklı yol bulunduğundan, tam olarak iki çakışmanın gerçekleştiği durumların sayısı $72 \cdot 194$ olur.

Taşların yerleştirilebileceği tüm durumların sayısı 4^8 olduğundan, aradığımız olasılık

$$\frac{72 \cdot 194}{4^8} = \frac{873}{4096} = 0,21313\ldots$$

olarak hesaplanır.

İkinci Çözüm. Çözüm için içerme dışarma prensibini kullanacağız.

Ateş, elindeki taşları yerleştirmek için her sıradan bir birim kare seçecektir. Her sırada dört birim kare ve toplam dört sıra bulunduğu için Ateş, taşlarını 4^4 farklı şekilde yerleştirebilir. Benzer şekilde, Güneş de kendi taşlarını 4^4 farklı şekilde yerleştirebilir. O halde, taşların tümü tahtaya $N_0 = 4^4 \cdot 4^4 = 65536$ farklı yoldan konumlanabilir.

Birinci sıranın birinci sütununda iki taş bulunduğunu kabul edelim. Bir başka deyişle bu kareye hem Ateş hem Güneş birer taş koymuş olsunlar. Başka çakışma olup olmadığını şimdilik hesaba katmıyoruz. Bu durumda Ateş, birinci sıranın dışındaki üç sıranın her birisinde bir kare ve Güneş, birinci sütunun dışındaki üç sütunun her birisinde bir kare seçecektir. Bu seçimlerin de $4^3 \cdot 4^3$ farklı yoldan yapılabileceği açıktır. Çakışmanın olduğu kare de 16 farklı yoldan seçilebileceğine göre $N_1 = 16 \cdot 4^6 = 65536$ elde edilir.

Şimdi birinci sıranın birinci sütununda ve ikinci sıranın ikinci sütununda çakışma olduğunu kabul edelim. Ateş geri kalan iki taşını üçüncü ve dördüncü sıralarda seçilecek karelere $4^2 = 16$ farklı şekilde yerleştirilebilir. Aynı şekilde Güneş için de 16 farklı seçim yolu bulunur. Çakışma olan iki karenin seçimi ise $(16 \cdot 9)/2! = 72$ farklı şekilde yapılabilir. Böylece $N_2 = 72 \cdot 16 \cdot 16 = 18432$ bulunur.

Birinci sıranın birinci sütununda, ikinci sıranın ikinci sütununda ve üçüncü sıranın üçüncü sütununda çakışma olduğunda ise, Ateş için dördüncü sıranın bir karesini seçmekten ibaret olan 4 seçenek; Güneş için de aynı şekilde 4 seçenek vardır. Çakışma olan üç kare ise $(16 \cdot 9 \cdot 4)/3! = 96$ farklı yoldan belirlenebilir. O halde $N_3 = 96 \cdot 16 = 1536$ olur.

Ateş ve Güneş'in tüm taşlarını aynı karelere yerleştirmeleri durumu, bu karelerin farklı sıra ve farklı sütunlarda bulunmasını gerektirdiğinden $N_4 = 4! = 24$ olur.

a. İçerme dışarma prensibi gereği, çakışma olmayan durumların sayısı

$$N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + N_4 = 16920$$

olarak hesaplanır. Aradığımız olasılık değeri de $\dfrac{16920}{2^{16}} = 0,25818\ldots$ dir.

b. Tam olarak iki çakışma olan durumların sayısı

$$\binom{2}{2}N_2 - \binom{3}{2}N_3 + \binom{4}{2}N_4 = N_2 - 3N_3 + 6N_4 = 13968$$

ve aranan olasılık değeri $\dfrac{13968}{2^{16}} = 0,21313\ldots$ dir.

(İçerme-dışarma prensibinin tanım ve uygulamaları, yarışmaya katılan öğrenciler için hazırlanan Çözümlü Matematik Problemleri kitabında bulunmaktadır.)