OYAK

TÜBİTAK BİLİM İNSANI DESTEKLEME DAİRE BAŞKANLIĞI

10. OYAK MATEMATİK YARIŞMASI

FİNAL SINAVI

ADANA - BALIKESİR - BATMAN - BOLU - DÜZCE
HATAY - KAHRAMANMARAŞ - MARDİN - ORDU
RİZE - SAKARYA - SİVAS - TEKİRDAĞ - ZONGULDAK

7 NİSAN 2012

SORULAR

---

1. Her x, y rasyonel sayıları için $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$ şartını sağlayan tüm $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ fonksiyonlarını bulunuz. ($\mathbb{Q}$: Rasyonel sayılar kümesi.)

2. $x_1, x_2, \ldots, x_{2012}$ tam sayılar olmak üzere,

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &+ x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 &+ x_4 = 3 \\ x_3 - x_4 &+ x_5 = 4 \\ &\vdots \\ x_{2010} - x_{2011} &+ x_{2012} = 2011 \\ x_{2011} - x_{2012} &+ x_1 = 2012 \\ x_{2012} - x_1 &+ x_2 = 1 \end{aligned}$$

denklem sisteminin tüm çözümlerini bulunuz.

3. Ateş ile Güneş, ilk atışı kimin yapacağına yazı tura atarak karar verdikten sonra bir hedefe nişan alarak sıra ile ok atmaya başlıyorlar ve hedef ikinci kez isabet aldığında duruyorlar. Ateş ve Güneş'in her bir atışlarında hedefi tutturma olasılıkları sırası ile $\dfrac{3}{10}$ ve $\dfrac{4}{10}$ dur.

a. İlk atışı Ateş'in yaptığı bilindiğine göre, son atışı Ateş'in yapmış olması olasılığını bulunuz.

b. Son atışı Ateş'in yaptığı bilindiğine göre, ilk atışı Ateş'in yapmış olması olasılığını bulunuz.

4. Bir ABC üçgeninin I merkezli içteğet çemberi BC kenarına D noktasında teğettir. $|BD| = |EC|$ olacak şekilde $[BC]$ kenarı üzerinde bir E noktası alınıyor. AE doğrusunun içteğet çemberi kestiği noktalardan A ya yakın olan K ve $[BC]$ kenarının orta noktası N olmak üzere $|KE| = 2|IN|$ olduğunu gösteriniz.

Süre 3 saattir.

Her soru 10 puan değerindedir.

ÇÖZÜMLER

1. Verilen denklemden $f(x-y)=f(y-x)$, buradan da tüm $x\in\mathbb{Q}$ için $f(-x)=f(x)$ elde edilir. Buna göre f fonksiyonu bir çift fonksiyondur. Ayrıca $x=y=0$ alınarak $f(0)=0$ olduğu görülür.

Tümevarım kullanarak her n pozitif tam sayısı için $f(nx)=n^2f(x)$ olduğunu gösterelim:
$n=1$ için eşitlik aşikardır. Her $k=1,2,\ldots,n$ için $f(kx)=k^2f(x)$ olduğunu kabul edelim.
Fonksiyonu tanımlayan denklemden $f(x+nx)+f(x-nx)=2f(x)+2f(nx)$ olduğundan ve
$f((1-n)x)=f((n-1)x)$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} f((n+1)x) &= 2f(x)+2f(nx)-f((n-1)x) \\ &= \left(2+2n^2-(n-1)^2\right)f(x) \\ &= (n+1)^2f(x) \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece her n pozitif tam sayısı için $f(nx)=n^2f(x)$ olduğunu göstermiş olduk. O halde, her m pozitif tam sayısı için $f(m)=m^2f(1)$ yazabiliriz. Öte yandan, m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere $n^2f\left(\dfrac{m}{n}\right)=f\left(n\dfrac{m}{n}\right)=f(m)$ olduğundan $m^2f(1)=n^2f\left(\dfrac{m}{n}\right)$, yani $f\left(\dfrac{m}{n}\right)=\left(\dfrac{m}{n}\right)^2f(1)$ olur. Bir başka deyişle, her x pozitif rasyonel sayısı için $f(x)=x^2f(1)$ olur. $f(0)=0$ ve f çift fonksiyon olduğundan $f(x)=x^2f(1)$ eşitliğinin her x rasyonel sayısı için geçerli olduğu anlaşılır. $f(1)=a$ dersek, verilen şartı sağlayan her fonksiyonun

$$f(x)=ax^2$$

formunda olması gerektiğini ispatlamış olduk.

Öte yandan $f(1)=a\in\mathbb{Q}$ olmak üzere $f(x)=ax^2$ şeklinde tanımlanan her fonksiyon soruda verilen $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)$ şartını sağlar. Zira

$$f(x+y)+f(x-y)=a(x+y)^2+a(x-y)^2=a(2x^2+2y^2)=2f(x)+2f(y) \quad \text{dir.}$$

Sonuç olarak $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)$ şartını sağlayan tüm $f:\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}$ fonksiyonları $f(x)=ax^2$ şeklinde ifade edilen fonksiyonlardır.

2. Verilen denklem sisteminin son ikisi dışındaki denklemleri ardışık olarak ikişer ikişer toplanırsa

$$\begin{aligned} x_1 &+ x_4=5 \\ x_2 &+ x_5=7 \\ x_3 &+ x_6=9 \\ x_4 &+ x_7=11 \\ x_5 &+ x_8=13 \\ &\vdots \\ x_{2009} &+ x_{2012}=4021 \end{aligned}$$

elde edilir. Birinci ile dördüncü denklemlerin farkı $x_7-x_1=6$; ikinci ile beşinci denklemlerin farkı $x_8-x_2=6$ ve bu şekilde devam ettiğimizde

$$x_7 - x_1=6$$

$$
\begin{aligned}
x_8 &- x_2 = 6 \\
x_9 &- x_3 = 6 \\
x_{10} &- x_4 = 6 \\
x_{11} &- x_5 = 6 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Buradan

$$
\begin{aligned}
x_7 &= x_1 + 6 \\
x_{13} &= x_7 + 6 = x_1 + 12 \\
x_{19} &= x_{13} + 6 = x_1 + 18 \\
&\vdots \\
x_{2011} &= x_1 + 2010
\end{aligned}
$$

ve benzer şekilde $x_{2012} = x_2 + 2010$ bulunur. Elde edilen bu eşitlikleri, sistemin son iki denkleminde yerine yazarsak

$$
\begin{aligned}
(x_1 + 2010) - (x_2 + 2010) + x_1 &= 2012 \\
(x_2 + 2010) - x_1 + x_2 &= 1
\end{aligned}
$$

yani

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 &= 2012 \\
-x_1 + 2x_2 &= -2009
\end{aligned}
$$

sistemi elde edilir. Bu sistemin tek çözümü

$$
x_1 = \frac{2015}{3}, \qquad x_2 = \frac{-2006}{3}
$$

olduğundan, soruda verilen sistemin tam sayılar kümesinde çözüm yoktur.

NOT 1: $x_k = y_k + k$ dönüşümü yapılırsa denklem sistemi

$$
\begin{aligned}
y_1 - y_2 &+ y_3 = 0 \\
&\vdots \\
y_{2010} - y_{2011} &+ y_{2012} = 0 \\
y_{2011} - y_{2012} &+ y_1 = 2012 \\
y_{2012} - y_1 &+ y_2 = -2012
\end{aligned}
$$

olur. Benzer şekilde tam sayılar kümesinde çözüm olmadığı gösterilir.

NOT 2 (Bolu Fen Lisesinin çözümünün özeti): Verilen denklem sisteminde ilk indeksi çift sayı olan denklemleri -1 ile çarpıp, elde edilen 2012 adet denklemi taraf tarafa toplarsak, $3(x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \cdots - x_{2010} + x_{2011} - x_{2012}) = -1005 + 2011 = 1006$ bulunur.
Dolayısıyla $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \cdots - x_{2010} + x_{2011} - x_{2012} = \dfrac{1006}{3}$ olur ki, bu bir tam sayı olmadığı için tam sayılar kümesinde çözüm olmadığı gösterilmiş olur.

3. İlk atışı Ateş'in yaptığı ve ilk isabeti Ateş'in kaydettiği (A, AGA, $AGAGA$, $AG\ldots GA$, $\ldots$ gibi) bir atışlar dizisini (AA) ile gösterelim. Böyle bir dizinin $p(AA)$ ile göstereceğimiz gerçekleşme olasılığını hesaplayalım:

Ateş'in ilk atışta vurma olasılığı $\frac{3}{10}$; Ateş'in ve Güneş'in ilk atışlarında kaçırıp sıra kendisine tekrar geldiğinde Ateş'in vurma olasılığı $\left(\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{10}\right) \cdot \frac{3}{10} = \frac{21}{50} \cdot \frac{3}{10}$; Ateş'in sıra kendisine üçüncü kez geldiğinde vurma olasılığı $\left(\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{10}\right)^2 \cdot \frac{3}{10} = \left(\frac{21}{50}\right)^2 \cdot \frac{3}{10}$ tür. Bu şekilde devam edildiğinde $p(AA)$ olasılığını

$$p(AA) = \frac{3}{10}\left(1 + \left(\frac{21}{50}\right) + \left(\frac{21}{50}\right)^2 + \cdots\right) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{21}{50}} = \frac{15}{29}$$

olarak elde ederiz. Bu olasılık değerini şu şekilde de hesaplayabilirdik: Bir (AA) dizisinin gerçekleşmesi için ya Ateş ilk atışında isabet kaydeder ya da Ateş ve Güneş ilk atışlarında kaçırırlar ve bundan sonra yine bir (AA) dizisi gerçekleşir. O halde

$$p(AA) = \frac{3}{10} + \left(\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{10}\right) p(AA)$$

yazılabilir ve buradan da $p(AA) = \frac{15}{29}$ elde edilir.

Benzer şekilde, ilk atışı Güneş'in yaptığı ve ilk isabeti Ateş'in kaydettiği bir atışlar dizisini (GA) ve böyle bir dizinin gerçekleşme olasılığını $p(GA)$ ile gösterelim. Bir (GA) dizisinin gerçekleşmesi için, ilk atışta Güneş'in kaçırması ve bundan sonra bir (AA) dizisinin gerçekleşmesi gerekir. O halde $p(GA) = \frac{6}{10} p(AA) = \frac{9}{29}$ dur.

İlk atışı Ateş'in yaptığı ve ilk isabeti Güneş'in kaydettiği bir diziyi (AG); İlk atışı Güneş'in yaptığı ve ilk isabeti Güneş'in kaydettiği bir diziyi de (GG) ile gösterelim. Bu dizilerin gerçekleşme olasılıkları da sırasıyla $p(AG)$ ve $p(GG)$ olsun. Benzer işlemlerle $p(AG) = \frac{14}{29}$ ve $p(GG) = \frac{20}{29}$ olarak hesaplanır.

a. Problemin bu şıkkında ilk atışı Ateş'in yaptığı ve hedef ikinci kez isabet aldığında atışların durduğu veriliyor. Son atışı Ateş'in yapmış olması için ya bir (AA) ve bunu takip eden bir (GA) dizisi ya da bir (AG) dizisi ve bundan sonra gelen bir (AA) dizisi gerçekleşmiş olmalıdır. İlk durumun, yani $(AA)(GA)$ dizilerinin peşi sıra gerçekleşmiş olması olasılığı $p(AA)p(GA) = \frac{135}{841}$ ve ikinci durumun gerçekleşmiş olması olasılığı da $p(AG)p(AA) = \frac{210}{841}$ dir. Sonuç olarak, ilk atışı Ateş'in yapması durumunda, son atışı da Ateş'in yapmış olması olasılığı $\frac{135}{841} + \frac{210}{841} = \frac{345}{841}$ olarak elde edilir.

Bu olasılık değerini şu şekilde de hesaplayabiliriz: sadece ilk iki atışı incelediğimizde üç seçenekle karşılaşırız.

- Her ikisi de hedefi vurmuştur $\left(\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{50}\right)$,
- Sadece biri hedefi vurmuştur $\left(\frac{4}{10} \cdot \frac{7}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{23}{50}\right)$,
- İkisi de hedefi vuramamıştır $\left(\frac{6}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{21}{50}\right)$.

Parantez içinde verilen değerler, ilgili durumun gerçekleşme olasılığını göstermektedir. Bu durumda, aranan olasılık değeri $P = \frac{6}{50} p(AA) + \frac{21}{50} P$ eşitliğini sağlayacağından, $P = \frac{345}{841}$ elde edilir.

b. İlk atış Güneş tarafından yapıldığında son atışı Ateş'in yapma olasılığını Q ile gösterirsek, yukarıdakine benzer şekilde $Q = \frac{6}{50} + \frac{23}{50}p(GA) + \frac{21}{50}Q$ elde edilir ve buradan $Q = \frac{381}{841}$ bulunur.

İlk atışı kimin yapacağı eşit olasılıklarla belirlendiğinden, son atışı Ateş'in yapma olasılığı

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{345}{841} + \frac{1}{2} \cdot \frac{381}{841} = \frac{1}{2} \cdot \frac{726}{841}$$

olur. İlk sırayı Ateş'in alması ve bu durumda son atışı Ateş'in yapması olasılığı $\frac{1}{2} \cdot \frac{345}{841}$ olduğundan, aradığımız olasılık $\frac{345}{726} = \frac{115}{242}$ olur.

4. Çözüm 1: N, $[BC]$ kenarının orta noktası olduğundan $|DN| = |NE|$ olur. D, I ve K noktalarının doğrusal olduğunu gösterirsek $|DI| = |IK|$ olduğundan $\triangle DIN \approx \triangle DKE$, yani $|KE| = 2|IN|$ elde edilir ve istenilen eşitlik gösterilmiş olur.

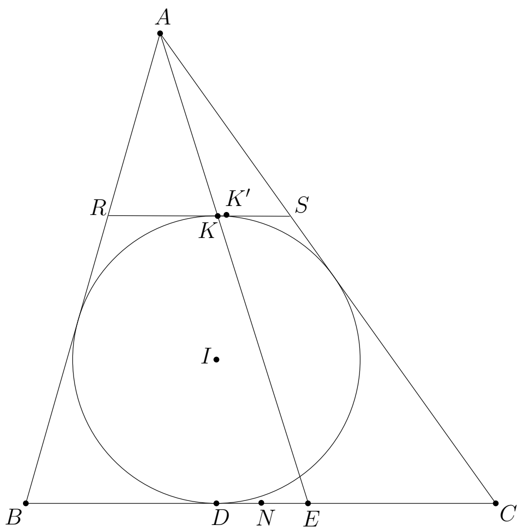
D, I, K noktalarının doğrusal olduğunu gösterelim. İçteğet çemberin DK' çapını ve K' noktasındaki teğeti çizelim. Bu teğet AB ve AC kenarlarını sırasıyla R ve S noktalarında kessin. $RS//BC$ olduğundan $\triangle ARS \approx \triangle ABC$ olur. AK' doğrusunun BC yi kestiği nokta E' olmak üzere $\triangle AK'S \approx \triangle AE'C$ olur. Benzerlik oranlarını yazarsak

$$\frac{|AR|}{|AB|} = \frac{|RS|}{|BC|} = \frac{|AS|}{|AC|} = \frac{|K'S|}{|E'C|} \qquad (1)$$

elde edilir. ARS üçgeninin dışteğet çemberinin RS kenarına K' noktasında teğet olduğu için $2|K'S| = |AR| + |RS| - |AS|$ ve ABC üçgeninin içteğet çemberi BC kenarına D noktasında teğet olduğu için $2|BD| = |AB| + |BC| - |AC|$ olur. (1) kullanılırsa

$$\frac{|K'S|}{|E'C|} = \frac{|AR| + |RS| - |AS|}{|AB| + |BC| - |AC|} = \frac{|K'S|}{|BD|} = \frac{|K'S|}{|EC|}$$

yani $E = E'$ ve buradan $K = K'$ olduğu bulunur. Yani D, I, K noktaları doğrusaldır.



Çözüm 2: H ile A merkezli $\dfrac{|AB|}{|AR|}$ oranlı homotetiyi gösterelim. $H(R) = B$, $H(S) = C$ olduğundan $H(\triangle ARS) = \triangle ABC$ olur. Dolayısıyla bu homometi altında ARS üçgeninin dışteğet çemberi ABC üçgeninin dışteğet çemberine gider. Ayrıca $H(K') = E$ olduğundan, A, K', E noktaları doğrusaldır.